ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 1060A5DD076C1D708BBBAD48EDF7B4FB
Владелец: ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА"
Действителен: с 18.04.2024 до 12.07.2025

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА»

Физико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ
И. о. проректора по УР
М. Х. Чанкаев
«29» мая 2024 г., протокол № 8

Рабочая программа дисциплины
Теория функций действительного переменного

(наименование дисциплины (модуля)

Направление подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
(шифр, название направления)

Направленность (профиль)
«Математика; информатика»

Квалификация выпускника
бакалавр

Форма обучения
Очная, очно-заочная, заочная

Год начала подготовки - 2022
(по учебному плану)

Карачаевск, 2024

Составитель: *канд. физ.-мат. наук, доцент Мамчуев А.М.*

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 22.02.2018 №125; образовательной программой высшего образования и учебным планом по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) «Математика; информатика», составленными с учетом требований Методических рекомендаций по подготовке кадров по программам педагогического бакалавриата на основе единых подходов к их структуре и содержанию («Ядро высшего педагогического образования») (одобрено Коллегией Министерства просвещения Российской Федерации 25 ноября 2021 г.); локальными актами КЧГУ.

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры математического анализа на 2024-2025 уч. год.

Протокол № 9 от 17.05.2024 г.

Содержание

1. Наименование дисциплины (модуля).....4
2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы.....4
3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.....5
4. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся.....7
5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий.....8
5.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах) .8
5.2. Тематика и краткое содержание лабораторных занятий.....16
5.3. Примерная тематика курсовых работ 16
6. Образовательные технологии 17
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю) 18
7.1. Описание шкал оценивания степени сформированности компетенций.....18
7.2. Типовые контрольные задания или иные учебно-методические материалы, необходимые для оценивания степени сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины 24
7.2.1. Типовые темы к письменным работам, докладам и выступлениям 24
7.2.2. Примерные вопросы к итоговой аттестации (экзамен) 27
7.2.3. Тестовые задания для проверки знаний студентов.....30
7.2.4. Балльно-рейтинговая система оценки знаний обучающихся 39
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля). Информационное обеспечение образовательного процесса.....40
8.1. Основная литература 40
8.2. Дополнительная литература.....**Ошибка! Закладка не определена.**
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля).....41
10. Требования к условиям реализации рабочей программы дисциплины (модуля) ..... **Ошибка! Закладка не определена.**
10.1. Общесистемные требования .....**Ошибка! Закладка не определена.**
10.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины ..... **Ошибка! Закладка не определена.**
10.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения**Ошибка! Закладка не определена.**
10.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы .....**Ошибка! Закладка не определена.**
11. Особенности реализации дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья.....**Ошибка! Закладка не определена.**
12. Лист регистрации изменений.....**Ошибка! Закладка не определена.**

1. Наименование дисциплины (модуля):

Теория функций действительного переменного

Целью изучения дисциплины является:

- теоретическое и практическое освоение студентами основных разделов теории функций действительного переменного, необходимых для понимания ее роли в профессиональной деятельности;
- обеспечение качественной подготовки бакалавров на основе применения методов обучения, характерных для теории функций действительного переменного;
- формирования математической культуры мышления, способности к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;
- освоения основных методов теории функций действительного переменного, применяемых в решении профессиональных задач, исследовательской деятельности в области образования.

Для достижения цели ставятся задачи:

- изучить необходимый понятийный аппарат дисциплины;
- сформировать умения доказывать факты и теоремы теории функций действительного переменного;
- сформировать умения решать типовые задачи основных разделов теории функций действительного переменного;
- знать теорию множеств, строение некоторых видов множеств, элементы теории рядов Фурье и уметь применять для решения различных задач;
- знать теорию меры и интеграла Лебега;
- знать основные структуры анализа; метрические и нормированные пространства;
- знать основы теории линейных операторов и линейных функционалов;
- освоение компетенций в области теории функций действительного переменного.

Цели и задачи дисциплины определены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями), направленность (профиль): «Математика; информатика», (квалификация – «бакалавр»).

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория функций действительного переменного» (Б1.О.07.05) относится к предметно-методическому модулю I блока Б1.

Дисциплина (модуль) изучается на 3 курсе в 5 семестре.

МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОП ВО	
Индекс	Б1.О.07.05
Требования к предварительной подготовке обучающегося:	

Данная учебная дисциплина опирается на входные знания, умения и компетенции, полученные по дисциплинам: «Математический анализ», «Алгебра», «Геометрия» в объёме вузовской программы бакалавриата.
Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:
Изучение дисциплины «Теория функций действительного переменного» необходимо для успешного освоения дисциплин формирующих компетенции **УК-1, ПК-1.**

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины «Теория функций действительного переменного» направлен на формирование следующих компетенций обучающегося:

Код компе-тенций	Содержание компетенции в соответствии с ФГОС ВО/ ПООП/ ОП ВО	Индикаторы достижения компетенций	Декомпозиция компетенций (результаты обучения) в соответствии с установленными индикаторами
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение УК-1.2. Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности УК-1.3. Анализирует источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений	**Знать:** - основы предметной области: основные базовые определения и понятия теории функций действительного переменного; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - культуру математического мышления, применяемых для решения профессиональных задач. **Уметь:** - решать задачи предметной области: выбирать метод и средства для решения конкретной типовой задачи, аргументировать свой выбор; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - понимать связи между различными

			математическими объектами теории функций действительного переменного, - обобщать, анализировать, воспринимать информацию, демонстрировать различные методы решения задачи и выбирать оптимальные методы имеющие применение в теории функций действительного переменного. **Владеть:** - навыками ориентировки в постановках задач и предлагать возможные варианты решения; - постановкой цели и выбором путей её достижения: математическим языком предметной области, корректно представлять знания в математической форме.
ПК-1	Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач.	ПК-1.1. Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета) ПК-1.2. Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО ПК-1.3. Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные	**Знать:** - теорию множеств, строение некоторых видов множеств, теорию меры и интеграла Лебега, теорию операторов и функционалов, элементы теории рядов Фурье для применения в образовательном процессе; - постановку, возможности решения и реализацию задач на предметном уровне в области математического образования. **Уметь:** - самостоятельно получать новые систематизированные научные и профессиональные

			знания: работать с конспектами лекций, учебниками, учебно-методической, справочной литературой, другими источниками информации; воспринимать и осмысливать информацию; - применять полученные знания для решения профессиональных задач; - самостоятельно получать знания для решения задач творческого характера, задач повышенной сложности; **Владеть:** - навыками обработки и интерпретации основных идей и методов теории функций действительного переменного, для решения профессиональных задач; - навыками практического использования теории функций действительного переменного при решении различных задач математического характера; - навыками самостоятельного решения задач.

4. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость (объем) дисциплины (модуля) составляет 3 ЗЕТ, 108 академических часов.

Объём дисциплины	Всего часов		
	для очной формы обучения	для очно-заочной формы обучения	для заочной формы обучения
Общая трудоемкость	**108**	**108**	**108**
Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий)*	**54**	**36**	**6**
Аудиторная работа (всего):	**54**	**36**	**6**
в том числе:			
лекции	18	12	2
семинары, практические занятия	36	24	4
практикумы	Не предусмотрено	Не предусмотрено	Не предусмотрено
лабораторные работы	Не предусмотрено	Не предусмотрено	Не предусмотрено
Внеаудиторная работа:			
консультация перед экзаменом			
Внеаудиторная работа также включает индивидуальную работу обучающихся с преподавателем, групповые, индивидуальные консультации и иные виды учебной деятельности, предусматривающие групповую или индивидуальную работу обучающихся с преподавателем, творческую работу (эссе), рефераты, контрольные работы и др.			
Самостоятельная работа	**54**	**45**	**94**
Контроль самостоятельной работы		**27**	**8**
Вид промежуточной аттестации обучающегося (зачет / экзамен)	**экзамен**	**экзамен**	**экзамен**

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

5.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)

Для очной формы

№ п/п	Раздел, тема дисциплины	Общая трудоемкость (в часах)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость (в часах)					
		Всего	Аудиторные уч. занятия			Сам. работа	Планируемые результаты обучения	Формы текущего контроля
			Лек.	Пр.	Лаб.			
	Раздел 1. Основные сведения о множествах. Мощность множества	**22**	**4**	**8**		**10**		
1.	Тема: Общая теория множеств. Операции над множествами. Понятие мощности. Эквивалентные множества.	2	2				УК-1, ПК-1	Устный опрос

	/***Лз***/							
2.	Тема: Основные сведения о множествах. Виды отображений. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
3.	Тема: Операции над множествами. Отображения множеств. Взаимно-однозначное соответствие. Эквивалентность множеств. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты
4.	Тема: Взаимно-однозначное соответствие. Эквивалентность множеств. Счетные множества. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
5.	Тема: Счетные множества. Несчетные множества. Множества мощности континуума. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Устный опрос
6.	Тема: Эквивалентность множеств. Счетные множества. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
7.	Тема: Непрерывные дроби. Двоичные дроби. Счетность множеств рациональных и алгебраических чисел. /***Ср***/	2				2	УК-1, ПК-1	Реферат
8.	Тема: Несчетные множества. Множества мощности континуума. Сравнение мощностей. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
9.	Тема: Трансфинитные числа. Континуум-гипотеза. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
	Раздел 2. Строение линейных множеств. Множества в различных пространствах	**14**	**2**	**4**		**8**		
10.	Тема: Точечные множества. Множества пространства R^n. Замкнутые и открытые множества, их свойства. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Устный опрос
11.	Тема: Точечные множества. Множества на плоскости, в пространстве. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
12.	Тема: Канторово множество и ковер Серпинского. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Устный опрос
13.	Тема: Плотные и нигде не плотные множества. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Сообщение
14.	Тема: Замкнутые и открытые множества. Примеры. Совершенные множества. Канторово совершенное множество. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
	Раздел 3. Мера множества. Меры Жордана и Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега	**30**	**6**	**8**		**16**		
15.	Тема: Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества. Мера Лебега для линейных множеств. Множества измеримые по Лебегу. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Блиц-опрос
16.	Тема: Измеримость и мера как инварианты движения. Свойства	2				2	УК-1, ПК-1	Творческое задание

	измеримых множеств. /***Ср***/							
17.	Тема: Внешняя и внутренняя меры. Мера открытых и замкнутых множеств. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
18.	Тема: Меры Жордана и Лебега. Их нахождение, примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
19.	Тема: Измеримые функции. Последовательности измеримых функций. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Блиц-опрос
20.	Тема: Классы измеримых множеств. Структура измеримых функций. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
21.	Тема: Измеримые функции. Структура измеримых функций. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
22.	Тема: Интеграл Лебега от ограниченной функции. Свойства интеграла Лебега. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Устный опрос
23.	Тема: Предельный переход под знаком интеграла Лебега. /***Ср***/	2				2	УК-1, ПК-1	Реферат
24.	Тема: Интеграл Римана. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
25.	Тема: Восстановление первообразной функции. /***Ср***/	2				2	УК-1, ПК-1	Сообщение
26.	Тема: Суммируемые функции. Интеграл от неотрицательной измеримой функции. Функции суммируемые с квадратом. /***Ср***/	6				6	УК-1, ПК-1	Доклад с презентацией
	Раздел 4. Метрические и нормированные пространства. Линейные операторы и линейные функционалы	**32**	**4**	**12**		**16**		
27.	Тема: Метрические пространства. Множества точек. Сходимость. Норма. Линейные нормированные пространства. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Фронтальный опрос
28.	Тема: Неравенства Коши-Буняковского, Минковского, Гельдера. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
29.	Тема: Метрические пространства. Множества точек. Сходимость. Примеры. Решение задач. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
30.	Тема: Норма. Аксиомы нормы. Примеры нормированных пространств. Решение задач. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
31.	Тема: Гильбертовы пространства. Свойства. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Блиц-опрос
32.	Тема: Скалярное произведение. Гильбертовы пространства. Ортогональность. Ортонормальность. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты
33.	Тема: Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность.	2	2				УК-1, ПК-1	Устный опрос

	Операторы в линейных нормированных пространствах. Линейные функционалы. Линейные функционалы в линейных нормированных и банаховых пространствах. /***Лз***/							
34.	Тема: Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность операторов. Линейные операторы в различных пространствах. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
35.	Тема: Линейные функционалы. Непрерывность и ограниченность. Норма функционала. Линейные функционалы в линейных нормированных пространствах. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
36.	Тема: Интегральные и дифференциальные операторы. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
37.	Тема: Банаховы пространства. Полные метрические пространства. Примеры. Принцип сжимающих отображений. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Доклад с презентацией
38.	Тема: Принцип сжимающих отображений. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
	Раздел 5. Ряды Фурье. Основные сведения.	**10**	**2**	**4**		**4**		
39.	Тема: Задача разложения в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда Фурье. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Устный опрос
40.	Тема: Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортонормальным системам. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Доклад с презентацией
41.	Тема: Разложение в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда Фурье. Вычисление. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты
42.	Тема: Разложение в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда Фурье. Вычисление. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
	ИТОГО:	**108**	**18**	**36**		**54**		

Для очно-заочной формы

№ п/п	**Раздел, тема дисциплины**	**Общая трудоемкость (в часах)**	**Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость (в часах)**			
		Всего	Аудиторные уч. занятия	Сам. раб	Планируемые результаты	Формы текущего

			Лек.	Пр.	Лаб.	ота	обучения	контроля
	Раздел 1. Основные сведения о множествах. Мощность множества	**19**	**2**	**4**		**13**		
1.	Тема: Общая теория множеств. Операции над множествами. Понятие мощности. Эквивалентные множества. Счетные множества. Несчетные множества. Множества мощности континуума. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Устный опрос
2.	Тема: Основные сведения о множествах. Виды отображений. /***Ср***/	6				6	УК-1, ПК-1	Реферат
3.	Тема: Операции над множествами. Отображения множеств. Взаимно-однозначное соответствие. Эквивалентность множеств. Счетные множества. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты
4.	Тема: Непрерывные дроби. Двоичные дроби. Счетность множеств рациональных и алгебраических чисел. /***Ср***/	3				3	УК-1, ПК-1	Реферат
5.	Тема: Несчетные множества. Множества мощности континуума. Сравнение мощностей. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
6.	Тема: Трансфинитные числа. Континуум-гипотеза. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
	Раздел 2. Строение линейных множеств. Множества в различных пространствах	**14**	**2**	**4**		**8**		
7.	Тема: Точечные множества. Множества пространства R^n. Замкнутые и открытые множества, их свойства. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Устный опрос
8.	Тема: Точечные множества. Множества на плоскости, в пространстве. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
9.	Тема: Канторово множество и ковер Серпинского. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Устный опрос
10.	Тема: Плотные и нигде не плотные множества. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Сообщение
11.	Тема: Замкнутые и открытые множества. Примеры. Совершенные множества. Канторово совершенное множество. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
	Раздел 3. Мера множества. Меры Жордана и Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега	**18**	**2**	**4**		**12**		
12.	Тема: Мера Лебега для линейных множеств. Множества измеримые по Лебегу. Интеграл Лебега от ограниченной функции. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Блиц-опрос
13.	Тема: Свойства интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Творческое задание

14.	Тема: Внешняя и внутренняя меры. Мера открытых и замкнутых множеств. Меры Жордана и Лебега. Их нахождение, примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
15.	Тема: Измеримые функции. Структура измеримых функций. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Блиц-опрос
16.	Тема: Интеграл Римана. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
17.	Тема: Суммируемые функции. Интеграл от неотрицательной измеримой функции. Функции суммируемые с квадратом. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Доклад с презентацией
	Раздел 4. Метрические и нормированные пространства. Линейные операторы и линейные функционалы	**22**	**4**	**10**		**8**		
18.	Тема: Метрические пространства. Множества точек. Сходимость. Норма. Линейные нормированные пространства. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Фронтальный опрос
19.	Тема: Неравенства Коши-Буняковского, Минковского, Гельдера. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
20.	Тема: Метрические пространства. Множества точек. Сходимость. Норма. Аксиомы нормы. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
21.	Тема: Скалярное произведение Гильбертовы пространства. Свойства. Ортогональность. Ортонормальность. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Блиц-опрос
22.	Тема: Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Операторы в линейных нормированных пространствах. Линейные функционалы. Линейные функционалы в линейных нормированных и банаховых пространствах. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Устный опрос
23.	Тема: Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность операторов. Линейные операторы в различных пространствах. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
24.	Тема: Линейные функционалы. Непрерывность и ограниченность. Норма функционала. Линейные функционалы в линейных нормированных пространствах. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
25.	Тема: Интегральные и дифференциальные операторы. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
26.	Тема: Банаховы пространства. Полные метрические пространства. Примеры. Принцип сжимающих отображений.	2		2			УК-1, ПК-1	Доклад с презентацией

	/***Пз***/							
	Раздел 5. Ряды Фурье. Основные сведения.	**8**	**2**	**2**		**4**		
27.	Тема: Задача разложения в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда Фурье. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Устный опрос
28.	Тема: Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортонормальным системам. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Доклад с презентацией
29.	Тема: Разложение в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда Фурье. Вычисление. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты
	Контроль	**27**						
	ИТОГО:	**108**	**12**	**24**		**45**		

Для заочной формы

№ п/п	Раздел, тема дисциплины	Общая трудоемкость (в часах)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость (в часах)					
		Всего	Аудиторные уч. занятия			Сам. работа	Планируемые результаты обучения	Формы текущего контроля
			Лек.	Пр.	Лаб.			
	Раздел 1. Основные сведения о множествах. Мощность множества	**22**	**2**	**2**		**18**		
1.	Тема: Общая теория множеств. Операции над множествами. Понятие мощности. Эквивалентные множества. Виды отображений. /***Ср***/	6				6	УК-1, ПК-1	Реферат
2.	Тема: Операции над множествами. Отображения множеств. Взаимно-однозначное соответствие. Эквивалентность множеств. Примеры. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Типовые расчеты
3.	Тема: Счетные множества. Несчетные множества. Множества мощности континуума. /***Лз***/	2	2				УК-1, ПК-1	Устный опрос
4.	Тема: Непрерывные дроби. Двоичные дроби. Счетность множеств рациональных и алгебраических чисел. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Сообщение
5.	Тема: Несчетные множества. Множества мощности континуума. Сравнение мощностей. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
6.	Тема: Трансфинитные числа. Континуум-гипотеза. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
	Раздел 2. Строение линейных множеств. Множества в	**12**				**12**		

	различных пространствах							
7.	Тема: Точечные множества. Множества пространства R^n. Замкнутые и открытые множества, их свойства. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Устный опрос
8.	Тема: Канторово множество и ковер Серпинского. Плотные и нигде не плотные множества. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Доклад с презентацией
9.	Тема: Замкнутые и открытые множества. Примеры. Совершенные множества. Канторово совершенное множество. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
	Раздел 3. Мера множества. Меры Жордана и Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега	**30**				**30**		
10.	Тема: Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества. Мера Лебега для линейных множеств. Множества измеримые по Лебегу. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
11.	Тема: Измеримость и мера как инварианты движения. Свойства измеримых множеств. /***Ср***/	2				2	УК-1, ПК-1	Сообщение
12.	Тема: Внешняя и внутренняя меры. Мера открытых и замкнутых множеств. Примеры. Меры Жордана и Лебега. Их нахождение, примеры. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
13.	Тема: Измеримые функции. Последовательности измеримых функций. Классы измеримых множеств. Структура измеримых функций. Примеры. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
14.	Тема: Интеграл Лебега от ограниченной функции. Свойства интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
15.	Тема: Интеграл Римана. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Примеры. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
16.	Тема: Восстановление первообразной функции. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Сообщение
17.	Тема: Суммируемые функции. Интеграл от неотрицательной измеримой функции. Функции суммируемые с квадратом. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
	Раздел 4. Метрические и нормированные пространства. Линейные операторы и линейные функционалы	**28**		**2**		**26**		
18.	Тема: Метрические пространства. Множества точек. Сходимость. Норма. Линейные нормированные пространства. /***Ср***/	2				2	УК-1, ПК-1	Фронтальный опрос

19.	Тема: Неравенства Коши-Буняковского, Минковского, Гельдера. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Сообщение
20.	Тема: Метрические пространства. Множества точек. Сходимость. Примеры. Норма. Аксиомы нормы. Примеры нормированных пространств. Решение задач. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
21.	Тема: Скалярное произведение. Гильбертовы пространства. Ортогональность. Ортонормальность. Примеры. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
22.	Тема: Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Операторы в линейных нормированных пространствах. Линейные функционалы. Линейные функционалы в линейных нормированных и банаховых пространствах. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
23.	Тема: Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность операторов. Линейные функционалы. Непрерывность и ограниченность. Норма функционала. Линейные функционалы в линейных нормированных пространствах. Примеры. /***Пз***/	2		2			УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
24.	Тема: Интегральные и дифференциальные операторы. /***Ср***/	2				2	УК-1, ПК-1	Сообщение
25.	Тема: Банаховы пространства. Полные метрические пространства. Примеры. Принцип сжимающих отображений. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Доклад с презентацией
26.	Тема: Принцип сжимающих отображений. Примеры. /***Ср***/	2				2	УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
	Раздел 5. Ряды Фурье. Основные сведения.	**8**				**8**		
27.	Тема: Задача разложения в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда Фурье. /***Ср***/	4				4	УК-1, ПК-1	Реферат
28.	Тема: Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортонормальным системам. /***Ср***/	2				2	УК-1, ПК-1	Реферат
29.	Тема: Разложение в тригонометрический ряд. Коэффициенты ряда Фурье. Вычисление. /***Ср***/	2				2	УК-1, ПК-1	Типовые расчеты, тесты
	Контроль	**8**						
	ИТОГО:	**108**	**2**	**4**		**94**		

5.2. Тематика и краткое содержание лабораторных занятий

Учебным планом не предусмотрены.

5.3. Примерная тематика курсовых работ

Учебным планом не предусмотрены.

6. Образовательные технологии

При проведении учебных занятий по дисциплине используются традиционные и инновационные, в том числе информационные образовательные технологии, включая при необходимости применение активных и интерактивных методов обучения.

Традиционные образовательные технологии реализуются, преимущественно, в процессе лекционных и практических занятий. Инновационные образовательные технологии используются в процессе аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов в виде применения активных и интерактивных методов обучения.

Информационные образовательные технологии реализуются в процессе использования электронно-библиотечных систем, электронных образовательных ресурсов и элементов электронного обучения в электронной информационно-образовательной среде для активизации учебного процесса и самостоятельной работы студентов.

Развитие у обучающихся навыков командной работы, межличностной коммуникации, принятия решений и лидерских качеств при проведении учебных занятий.

Практические занятия относятся к интерактивным методам обучения и обладают значительными преимуществами по сравнению с традиционными методами обучения, главным недостатком которых является известная изначальная пассивность субъекта и объекта обучения.

Практические занятия могут проводиться в форме групповой дискуссии, «мозговой атаки», разборка кейсов, решения практических задач, анализа ситуации и др. Прежде, чем дать группе информацию, важно подготовить участников, активизировать их ментальные процессы, включить их внимание, развивать кооперацию и сотрудничество при принятии решений.

Методические рекомендации по проведению различных видов практических (семинарских) занятий.

1. Обсуждение в группах.

Групповое обсуждение какого-либо вопроса направлено на нахождении истины или достижение лучшего взаимопонимания, Групповые обсуждения способствуют лучшему усвоению изучаемого материала.

На первом этапе группового обсуждения перед обучающимися ставится проблема, выделяется определенное время, в течение которого обучающиеся должны подготовить аргументированный развернутый ответ.

Преподаватель может устанавливать определенные правила проведения группового обсуждения:

- задавать определенные рамки обсуждения (например, указать не менее 5…. 10 ошибок);
- ввести алгоритм выработки общего мнения (решения);
- назначить модератора (ведущего), руководящего ходом группового обсуждения.

На втором этапе группового обсуждения вырабатывается групповое решение совместно с преподавателем (арбитром).

Разновидностью группового обсуждения является круглый стол, который проводится с целью поделиться проблемами, собственным видением вопроса, познакомиться с опытом, достижениями.

2. Публичная презентация проекта

Презентация – самый эффективный способ донесения важной информации как в разговоре «один на один», так и при публичных выступлениях. Слайд-презентации с использованием мультимедийного оборудования позволяют эффективно и наглядно представить содержание изучаемого материала, выделить и проиллюстрировать сообщение, которое несет поучительную информацию, показать ее ключевые содержательные пункты. Использование интерактивных элементов позволяет усилить эффективность публичных выступлений.

3. Дискуссия

Как интерактивный метод обучения означает исследование или разбор. Образовательной дискуссией называется целенаправленное, коллективное обсуждение конкретной проблемы (ситуации), сопровождающейся обменом идеями, опытом, суждениями, мнениями в составе группы обучающихся.

Как правило, дискуссия обычно проходит три стадии: ориентация, оценка и консолидация. Последовательное рассмотрение каждой стадии позволяет выделить следующие их особенности.

Стадия ориентации предполагает адаптацию участников дискуссии к самой проблеме, друг другу, что позволяет сформулировать проблему, цели дискуссии; установить правила, регламент дискуссии.

В стадии оценки происходит выступление участников дискуссии, их ответы на возникающие вопросы, сбор максимального объема идей (знаний), предложений, пресечение преподавателем (арбитром) личных амбиций отклонений от темы дискуссии.

Стадия консолидации заключается в анализе результатов дискуссии, согласовании мнений и позиций, совместном формулировании решений и их принятии.

В зависимости от целей и задач занятия, возможно, использовать следующие виды дискуссий: классические дебаты, экспресс-дискуссия, текстовая дискуссия, проблемная дискуссия, ролевая (ситуационная) дискуссия.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

7.1. Описание шкал оценивания степени сформированности компетенций

Уровни сформированности компетенций	**Индикаторы**	**Качественные критерии оценивания**			
		2 балла	**3 балла**	**4 балла**	**5 баллов**
УК-1					
Базовый	**Знать:** - основы предметной области: основные базовые определения и понятия теории функций действительного	Не знает - основы предметной области: основные базовые определения и понятия теории функций действительного	В целом знает - основы предметной области: основные базовые определения и понятия теории функций действительного	Знает - основы предметной области: основные базовые определения и понятия теории функций действительного	

	переменного; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - культуру математического мышления, применяемых для решения поставленных творческих (исследовательских) задач.	переменного; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - культуру математического мышления, применяемых для решения поставленных творческих (исследовательских) задач.	переменного; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - культуру математического мышления, применяемых для решения поставленных творческих (исследовательских) задач.	переменного; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - культуру математического мышления, применяемых для решения поставленных творческих (исследовательских) задач.	
	Уметь: - решать задачи предметной области: выбирать метод и средства для решения конкретной типовой задачи, аргументировать свой выбор; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - понимать связи между различными математическими объектами теории функций действительного переменного, - обобщать, анализировать, воспринимать информацию, демонстрировать различные методы решения задачи и выбирать оптимальные методы имеющие применение в теории функций действительного переменного.	Не умеет - решать задачи предметной области: выбирать метод и средства для решения конкретной типовой задачи, аргументировать свой выбор; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - понимать связи между различными математическими объектами теории функций действительного переменного, - обобщать, анализировать, воспринимать информацию, демонстрировать различные методы решения задачи и выбирать оптимальные методы имеющие применение в теории функций действительного переменного.	В целом умеет - решать задачи предметной области: выбирать метод и средства для решения конкретной типовой задачи, аргументировать свой выбор; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - понимать связи между различными математическими объектами теории функций действительного переменного, - обобщать, анализировать, воспринимать информацию, демонстрировать различные методы решения задачи и выбирать оптимальные методы имеющие применение в теории функций действительного переменного.	Умеет - решать задачи предметной области: выбирать метод и средства для решения конкретной типовой задачи, аргументировать свой выбор; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - понимать связи между различными математическими объектами теории функций действительного переменного, - обобщать, анализировать, воспринимать информацию, демонстрировать различные методы решения задачи и выбирать оптимальные методы имеющие применение в теории функций действительного переменного.	
	Владеть: - навыками ориентировки в постановках задач и предлагать	Не владеет - навыками ориентировки в постановках задач и предлагать	В целом владеет - навыками ориентировки в постановках задач и предлагать	Владеет - навыками ориентировки в постановках задач и предлагать	

	возможные варианты решения; - постановкой цели и выбором путей её достижения: математическим языком предметной области, корректно представлять знания в математической форме.	возможные варианты решения; - постановкой цели и выбором путей её достижения: математическим языком предметной области, корректно представлять знания в математической форме.	возможные варианты решения; - постановкой цели и выбором путей её достижения: математическим языком предметной области, корректно представлять знания в математической форме.	возможные варианты решения; - постановкой цели и выбором путей её достижения: математическим языком предметной области, корректно представлять знания в математической форме.	
Повышенный	**Знать:** - основы предметной области: основные базовые определения и понятия теории функций действительного переменного; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - культуру математического мышления, применяемых для решения поставленных творческих (исследовательских) задач.				В полном объеме знает - основы предметной области: основные базовые определения и понятия теории функций действительного переменного; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - культуру математического мышления, применяемых для решения поставленных творческих (исследовательских) задач.
	Уметь: - решать задачи предметной области: выбирать метод и средства для решения конкретной типовой задачи, аргументировать свой выбор; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - понимать связи между различными математическими				В полном объеме умеет - решать задачи предметной области: выбирать метод и средства для решения конкретной типовой задачи, аргументировать свой выбор; - методы, идеи и принципы теории функций действительного переменного; - понимать связи между различными математическими

	объектами теории функций действительного переменного, - обобщать, анализировать, воспринимать информацию, демонстрировать различные методы решения задачи и выбирать оптимальные методы имеющие применение в теории функций действительного переменного.				объектами теории функций действительного переменного, - обобщать, анализировать, воспринимать информацию, демонстрировать различные методы решения задачи и выбирать оптимальные методы имеющие применение в теории функций действительного переменного.
	Владеть: - навыками ориентировки в постановках задач и предлагать возможные варианты решения; - постановкой цели и выбором путей её достижения: математическим языком предметной области, корректно представлять знания в математической форме.				В полном объеме владеет - навыками ориентировки в постановках задач и предлагать возможные варианты решения; - постановкой цели и выбором путей её достижения: математическим языком предметной области, корректно представлять знания в математической форме.
ПК-1					
Базовый	**Знать:** - теорию множеств, строение некоторых видов множеств, теорию меры и интеграла Лебега, теорию операторов и функционалов, элементы теории рядов Фурье для применения в образовательном процессе; - постановку, возможности решения и реализацию задач	Не знает - теорию множеств, строение некоторых видов множеств, теорию меры и интеграла Лебега, теорию операторов и функционалов, элементы теории рядов Фурье для применения в образовательном процессе; - постановку, возможности решения и	В целом знает - теорию множеств, строение некоторых видов множеств, теорию меры и интеграла Лебега, теорию операторов и функционалов, элементы теории рядов Фурье для применения в образовательном процессе; - постановку, возможности решения и	Знает - теорию множеств, строение некоторых видов множеств, теорию меры и интеграла Лебега, теорию операторов и функционалов, элементы теории рядов Фурье для применения в образовательном процессе; - постановку, возможности решения и	

	на предметном уровне в области математического образования.	реализацию задач на предметном уровне в области математического образования.	реализацию задач на предметном уровне в области математического образования.	реализацию задач на предметном уровне в области математического образования.	
	Уметь: - самостоятельно получать новые систематизированные научные и профессиональные знания: работать с конспектами лекций, учебниками, учебно-методической, справочной литературой, другими источниками информации; воспринимать и осмысливать информацию; - применять полученные знания для решения профессиональных задач; - самостоятельно получать знания для решения задач творческого характера, задач повышенной сложности.	Не умеет - самостоятельно получать новые систематизированные научные и профессиональные знания: работать с конспектами лекций, учебниками, учебно-методической, справочной литературой, другими источниками информации; воспринимать и осмысливать информацию; - применять полученные знания для решения профессиональных задач; - самостоятельно получать знания для решения задач творческого характера, задач повышенной сложности.	В целом умеет - самостоятельно получать новые систематизированные научные и профессиональные знания: работать с конспектами лекций, учебниками, учебно-методической, справочной литературой, другими источниками информации; воспринимать и осмысливать информацию; - применять полученные знания для решения профессиональных задач; - самостоятельно получать знания для решения задач творческого характера, задач повышенной сложности.	Умеет - самостоятельно получать новые систематизированные научные и профессиональные знания: работать с конспектами лекций, учебниками, учебно-методической, справочной литературой, другими источниками информации; воспринимать и осмысливать информацию; - применять полученные знания для решения профессиональных задач; - самостоятельно получать знания для решения задач творческого характера, задач повышенной сложности.	
	Владеть: - навыками обработки и интерпретации основных идей и методов теории функций действительного переменного; - навыками практического использования теории функций действительного переменного при решении различных задач математического	Не владеет - навыками обработки и интерпретации основных идей и методов теории функций действительного переменного; - навыками практического использования теории функций действительного переменного при решении различных задач математического	В целом владеет - навыками обработки и интерпретации основных идей и методов теории функций действительного переменного; - навыками практического использования теории функций действительного переменного при решении различных задач математического	Владеет - навыками обработки и интерпретации основных идей и методов теории функций действительного переменного; - навыками практического использования теории функций действительного переменного при решении различных задач математического	

	характера; - навыками самостоятельного решения задач.	характера; - навыками самостоятельного решения задач.	характера; - навыками самостоятельного решения задач.	характера; - навыками самостоятельного решения задач.	
Повышенный	**Знать:** - теорию множеств, строение некоторых видов множеств, теорию меры и интеграла Лебега, теорию операторов и функционалов, элементы теории рядов Фурье для применения в образовательном процессе; - постановку, возможности решения и реализацию задач на предметном уровне в области математического образования.				В полном объеме знает - теорию множеств, строение некоторых видов множеств, теорию меры и интеграла Лебега, теорию операторов и функционалов, элементы теории рядов Фурье для применения в образовательном процессе; - постановку, возможности решения и реализацию задач на предметном уровне в области математического образования.
	Уметь: - самостоятельно получать новые систематизированные научные и профессиональные знания: работать с конспектами лекций, учебниками, учебно-методической, справочной литературой, другими источниками информации; воспринимать и осмысливать информацию; - применять полученные знания для решения учебных и исследовательских задач; - самостоятельно получать знания				В полном объеме умеет - самостоятельно получать новые систематизированные научные и профессиональные знания: работать с конспектами лекций, учебниками, учебно-методической, справочной литературой, другими источниками информации; воспринимать и осмысливать информацию; - применять полученные знания для решения учебных и исследовательских задач; - самостоятельно

	для решения задач творческого характера, задач повышенной сложности.				получать знания для решения задач творческого характера, задач повышенной сложности.
	Владеть: - навыками обработки и интерпретации основных идей и методов теории функций действительного переменного, для определения и решения исследовательских задач; - навыками практического использования теории функций действительного переменного при решении различных задач математического характера; - навыками самостоятельного решения задач: выполнять творческие (исследовательские) проекты, применяя в своей педагогической деятельности при реализации образовательного процесса.				В полном объеме владеет - навыками обработки и интерпретации основных идей и методов теории функций действительного переменного, для определения и решения исследовательских задач; - навыками практического использования теории функций действительного переменного при решении различных задач математического характера; - навыками самостоятельного решения задач: выполнять творческие (исследовательские) проекты, применяя в своей педагогической деятельности при реализации образовательного процесса.

7.2. Типовые контрольные задания или иные учебно-методические материалы, необходимые для оценивания степени сформированности компетенций в процессе освоения учебной дисциплины

7.2.1. Типовые темы к письменным работам, докладам и выступлениям

Раздел 1. Мощность множества. Строение линейных множеств. Множества в различных пространствах.

1. Отображения, их виды.
2. Равномощные множества.
3. Счетные множества. Примеры счетных множеств. Признаки счетности множеств.
4. Мощность континуума? Мощность множества всех числовых последовательностей.

5. Доказать, что множество нечетных натуральных чисел и множество четных натуральных чисел равномощны.
6. Доказать, что множество положительных действительных чисел равномощно множеству отрицательных действительных чисел.
7. Доказать, что множество натуральных чисел равномощно множеству чисел, являющихся точными квадратами.
8. Доказать, что любые два интервала $(a;b)$ и $(c;d)$ равномощны. Доказать, что отрезок $[a;b]$ и интервал $(a;b)$ равномощны.
9. Доказать, что любой круг равномощен любому квадрату.
10. Доказать, что множество иррациональных чисел равномощно множеству действительных чисел.
11. Показать, что множество точек плоскости с рациональными абсциссами имеет мощность континуума.
12. Доказать, что множество всех точек плоскости имеет мощность континуума.
13. Дайте определение внутренней, внешней и граничной точек множества E. Дайте определение границы множества. Приведите примеры внутренних, внешних и граничных точек для различных фигур на плоскости.
14. Совершенные множества. Канторово совершенное множество. Приведите примеры.
15. Пример всюду плотного множества на отрезке $[0;\,1]$, отличного от этого отрезка.
16. Свойства открытых и замкнутых множеств.
17. Пусть E – множество функций пространства **C**[-1;1] таких, что $f(x) \le 1$ при $x \in [-1;1]$. Показать, что функция $f_0(x) = 2x$ является внешней «точкой» для множества E.

Раздел 2. Измеримые множества. Мера множества. Мера Лебега. Измеримые функции. Интеграл Лебега.

1. Дайте определение интеграла Римана. Приведите примеры интегрируемых и неинтегрируемых по Риману функций.
2. Какая функция называется интегрируемой по Лебегу на отрезке? Можно ли указать функцию, интегрируемую на отрезке по Риману, но не интегрируемую по Лебегу?
3. Можно ли указать функцию, интегрируемую на отрезке по Лебегу, но не интегрируемую по Риману?
4. Какое множество называется измеримым по Лебегу? Какое число называется его мерой?
6. Докажите, что любой интервал $(a;b)$ измерим, и найдите его меру.
7. В чем заключается свойство счетной аддитивности меры?
8. Измеримость и мера как инварианты движения.
8. Приведите классы измеримых множеств. Их основные свойства.
9. Охарактеризуйте структуру измеримых функций.
10. Показать, что функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \text{ иррациональном}, \\ 1 \text{ при } x \text{ рациональном} \end{cases}$ не интегрируема по Риману на отрезке $[0;\,1]$.
11. Показать, что функция $f(x) = \begin{cases} x \text{ при } x \in [0;1), \\ 0 \text{ при } x \notin [0;1) \end{cases}$ интегрируема по Лебегу, и найти ее интеграл.
12. Показать, что функция f такая, что $f(0) = 0$ и $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ при $x \ne 0$ интегрируема на отрезке $[-1;\,8]$, и найти ее интеграл.

13. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ интегрируема на R, и найти ее интеграл.
14. В чем заключается предельный переход под знаком интеграла Лебега?
15. Как восстановить первообразную функции?
16. В чем смысл сходимости по мере и сходимости почти всюду (почти везде)? Их связь.
17. Суммируемые функции. Определение. Примеры.
18. Интеграл от неотрицательной измеримой функции.

Раздел 3. Метрические и нормированные пространства. Линейные операторы и линейные функционалы.

1. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость элементов.
2. Линейные и аффинные многообразия. Примеры. Изоморфизм.
3. Конечномерные и бесконечномерные линейные пространства.
4. Метрические пространства. Метрика. Примеры.
4. Норма. Линейные нормированные пространства. Аксиомы нормы. Примеры.
5. Неравенства Коши-Буняковского, Минковского, Гельдера.
6. Свойства нормированных пространств. Эквивалентность норм.
7. Евклидовы пространства. Примеры.
8. Скалярное произведение. Аксиомы. Свойства. Примеры пространств со скалярным произведением.
10. Линейные функционалы. Непрерывность и ограниченность.
11. Линейные функционалы в линейных нормированных пространствах.
12. Теорема Хана-Банаха.
13. Непрерывные линейные функционалы в линейных нормированных пространствах.
14. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность.
15. Операторы в нормированных пространствах. Линейные операторы в различных пространствах.
16. Интегральные и дифференциальные операторы.

Раздел 4. Ряды Фурье. Основные сведения.

1. В чем заключена задача разложения в тригонометрический ряд.
2. Коэффициенты ряда Фурье. Формулы.
3. Как проверить ортогональность системы функций.
4. Какой вид имеет неравенство Бесселя для тригонометрической системы?
5. Как выглядит комплексная форма тригонометрического ряда Фурье?
6. Условия сходимости ряда Фурье.
7. Ряды Фурье по ортонормальным системам.
8. Ряды Фурье в произвольном гильбертовом пространстве.
9. Разложение функций в ряд Фурье по четным и нечетным степеням.
10. Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x)=x$, на интервале $(-\pi,\pi)$

11. Почему ряд $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ можно почленно интегрировать в промежутке от $-\pi$ до π.

12. В разложении в ряд Фурье функции $f(x)=\begin{cases}-2; -\pi<x<0\\ 3; 0\le x<\pi\end{cases}$, на интервале $(-\pi,\pi)$ найти коэффициент a_0.

13. Укажите, при каком значении l система функций $\left\{1, \cos\dfrac{\pi nx}{l}, \sin\dfrac{\pi nx}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на отрезке [–2; 2]:

14. Для тригонометрического ряда, составленного для функции $f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+...+a_n\cos nx+b_n\sin nx+...,\quad -\pi\le x\le\pi$, найдите формулы коэффициентов Фурье (n = 1, 2, 3, …).

15. Для тригонометрического ряда $b_1\sin x+b_2\sin 2x+...+b_n\sin nx+...$, составленного для функции $f(x)$ на отрезке $[0;\pi]$, найдите формулы коэффициентов Фурье(n = 1, 2, 3, …).

16. Для тригонометрического ряда $a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+...+a_n\cos nx+...$, составленного для функции $f(x)$ на отрезке $[0;\pi]$, укажите верные формулы коэффициентов Фурье(n = 1, 2, 3, …).

Критерии оценки доклада, сообщения, реферата:

Отметка «отлично» за письменную работу, реферат, сообщение ставится, если изложенный в докладе материал:

- отличается глубиной и содержательностью, соответствует заявленной теме;
- четко структурирован, с выделением основных моментов;
- доклад сделан кратко, четко, с выделением основных данных;
- на вопросы по теме доклада получены полные исчерпывающие ответы.

Отметка «хорошо» ставится, если изложенный в докладе материал:

- характеризуется достаточным содержательным уровнем, но отличается недостаточной структурированностью;
- доклад длинный, не вполне четкий;
- на вопросы по теме доклада получены полные исчерпывающие ответы только после наводящих вопросов, или не на все вопросы.

Отметка «удовлетворительно» ставится, если изложенный в докладе материал:

- не достаточно раскрыт, носит фрагментарный характер, слабо структурирован;
- докладчик слабо ориентируется в излагаемом материале;
- на вопросы по теме доклада не были получены ответы или они не были правильными.

Отметка «неудовлетворительно» ставится, если:

- доклад не сделан;
- докладчик не ориентируется в излагаемом материале;
- на вопросы по выполненной работе не были получены ответы или они не были правильными.

7.2.2. Примерные вопросы к итоговой аттестации (экзамен)

Билет №1

1. Отображения множеств. Виды отображений. Примеры.
2. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.
3. Эквивалентные нормы в R^n. Примеры.

Билет №2

1. Основные сведения о множествах. Операции над множествами. Примеры.
2. Сходимость ряда Фурье.
3. Доказать, что множество целых чисел счетно.

Билет №3

1. Понятие эквивалентности множеств. Примеры.
2. Свойства нормированных пространств. Подпространства. Эквивалентность норм. Примеры.
3. Доказать, что производное множество каждого множества замкнуто.

Билет №4

1. Понятие мощности множеств. Примеры.
2. Внешняя и внутренняя меры ограниченного множества. Примеры.
3. Доказать, что замыкание каждого множества замкнуто.

Билет №5

1. Счетные множества и их свойства. Примеры.
2. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность. Операторы в нормированных пространствах. Примеры.

3. Доказать, что внутренность любого множества есть открытое множество.

Билет №6

1. Счетность множеств рациональных и алгебраических чисел. Примеры.
2. Мера замкнутых множеств. Примеры.
3. Доказать, что граница каждого множества замкнута.

Билет №7

1. Несчетность множества действительных чисел.
2. Измеримые функции. Примеры.
3. Найти разложение в ряд Фурье функции $f(x) = x$, на интервале $(-\pi, \pi)$

Билет №8

1. Множества мощности континуума. Примеры.
2. Линейные функционалы в линейных нормированных пространствах. Теорема Хана-Банаха. Примеры.

3. Показать, что функция $f(x) = \begin{cases} x \ при \ x \in [0;1), \\ 0 \ при \ x \notin [0;1) \end{cases}$ интегрируема по Лебегу, и найти ее интеграл.

Билет №9

1. Эквивалентные функции. Измеримость непрерывной функции. Примеры.
2. Линейные операторы в различных пространствах. Интегральные и дифференциальные операторы. Примеры.

3. Установить взаимно-однозначное соответствие между отрезком [0,1] и интервалом (0,1).

Билет №10

1. Мощность множества $C_{[a,b]}$.
2. Сравнение интегралов Римана и Лебега. Примеры.
3. В разложении в ряд Фурье функции $f(x) = \begin{cases} -2; -\pi < x < 0 \\ 3; 0 \le x < \pi \end{cases}$, на интервале $(-\pi, \pi)$ найти коэффициент a_0.

Билет №11

1. Мощность множества всех вещественных функций.
2. Свойства интеграла Лебега.
3. Доказать, что отрезок $[a;b]$ и интервал $(a;b)$ равномощны.

Билет №12

1. Сравнение мощностей. Примеры.
2. Неравенства Коши-Буняковского, Минковского, Гельдера. Применения.

3. Для тригонометрического ряда $b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + ... + b_n \sin nx + ...$, составленного для функции $f(x)$ на отрезке $[0; \pi]$, найдите формулы коэффициентов Фурье (n = 1, 2, 3, …).

Билет №13

1. Мощность множества подмножеств. Примеры.
2. Норма. Линейные нормированные пространства. Аксиомы нормы. Примеры.
3. Постройте биективное отображение луча $(0, \infty)$ на прямую.

Билет №14

1. Замкнутые и открытые множества. Примеры.
2. Линейные функционалы. Непрерывность и ограниченность. Примеры.
3. Постройте биективное отображение круга радиуса r на круг радиуса R, $(r < R)$.

Билет №15

1. Замкнутые множества и их свойства. Примеры.
2. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Примеры.
3. Для тригонометрического ряда $a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx + ...$, составленного для функции $f(x)$ на отрезке $[0; \pi]$, укажите верные формулы коэффициентов Фурье(n = 1, 2, 3, …).

Билет №16

1. Открытые множества и их свойства. Примеры.
2. Задача разложения функции в тригонометрический ряд. Примеры.
3. Доказать, что множество точных квадратов натуральных чисел счетно.

Билет №17

1. Структура и строение открытых множеств. Примеры.
2. Скалярное произведение. Аксиомы. Свойства. Примеры.
3. Докажите, что любой интервал $(a;b)$ измерим, и найдите его меру.

Билет №18

1. Структура и строение замкнутых множеств. Примеры.
2. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье. Примеры.
3. Доказать, что множество всех точек плоскости имеет мощность континуума.

Билет №19

1. Совершенные множества. Канторово совершенное множество. Примеры.
2. Метрические пространства. Аксиомы метрики. Примеры.
3. Доказать, что любой круг равномощен любому квадрату.

Билет №20

1. Понятие меры множества. Мера открытых множеств. Примеры.
2. Формулы Фурье для коэффициентов ряда. Примеры.
3. Доказать, что множество иррациональных чисел равномощно множеству действительных чисел.

Критерии оценки устного ответа на вопросы по дисциплине «Теория функций действительного переменного»:

✓ 5 баллов - если ответ показывает глубокое и систематическое знание всего программного материала и структуры конкретного вопроса, а также основного содержания и новаций лекционного курса по сравнению с учебной литературой. Студент демонстрирует отчетливое и свободное владение концептуально-понятийным аппаратом, научным языком и терминологией соответствующей научной области. Знание основной

литературы и знакомство с дополнительно рекомендованной литературой. Логически корректное и убедительное изложение ответа.

✓ 4 - балла - знание узловых проблем программы и основного содержания лекционного курса; умение пользоваться концептуально-понятийным аппаратом в процессе анализа основных проблем в рамках данной темы; знание важнейших работ из списка рекомендованной литературы. В целом логически корректное, но не всегда точное и аргументированное изложение ответа.

✓ 3 балла – фрагментарные, поверхностные знания важнейших разделов программы и содержания лекционного курса; затруднения с использованием научно-понятийного аппарата и терминологии учебной дисциплины; неполное знакомство с рекомендованной литературой; частичные затруднения с выполнением предусмотренных программой заданий; стремление логически определенно и последовательно изложить ответ.

✓ 2 балла – незнание, либо отрывочное представление о данной проблеме в рамках учебно-программного материала; неумение использовать понятийный аппарат; отсутствие логической связи в ответе.

7.2.3. Тестовые задания для проверки знаний студентов

Тест I

Мощность множества. Линейные множества.

1. Задание №1 **(ПК-1)** Если между элементами двух различных множеств А и В, можно установить взаимно-однозначное соответствие, хотя бы по одному закону, то эти множества называются ……

Правильные варианты ответа: эквивалентными; эквивалентные.

2. Задание № 2 **(УК-1, ПК-1)** Соответствие между множествами и их мощностями:

1. Множество всех рациональных чисел	а) счетное
2. Множество всех алгебраических чисел	б) счетное
3. Множество всех иррациональных чисел	в) несчетное
4. Множество всех трансцендентных чисел	г) несчетное

Правильные варианты ответа: 1-а, 2-б, 3-в, 4-г.

3. Задание № 3 **(УК-1, ПК-1)** Мощность множества всех вещественных функций, определенных на отрезке $[0,1]$, имеет мощность…

☐ c ☐ $f-c$ ☐ a ☑ f ☐ $\frac{c}{a}$

4. Задание № 4 **(УК-1, ПК-1)** Мощность множества всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, имеет мощность…

☐ $\frac{a}{f}$ ☐ $f+c$ ☐ a ☐ $a\cdot c$ ☑ c

5. Задание № 5 **(УК-1, ПК-1)** Соответствие между множествами и их свойствами и определениями:

1. Множество открытое	а) Состоит только из внутренних точек
2. Множество замкнутое	б) Содержит все свои предельные точки

3. Множество производное в) Множество всех предельных точек

4. Множество плотное в себе г) Все точки множества есть предельные

Правильные варианты ответа: 1-а, 2-б, 3-в, 4-г.

6. Задание № 6 **(УК-1, ПК-1)** Множество $A=\left\{1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},...,0\right\}$ …

☐ не замкнуто ☐ совершенное ☑ замкнуто, но не плотно в себе ☐ плотно в себе

7. Задание № 7 **(УК-1, ПК-1)** Соответствие между множествами:

1. $(a,b)\subset[c,d]$ а) $[c,a]\cup[b,d]$ - замкнуто

2. $[a,b]\subset(c,d)$ б) $(c,a)\cup[b,d]$ - открыто

3. $[a,b]\subset[c,d]$ в) $[c,a)\cup(b,d]$- ни замкнуто, ни открыто

г) $[c,a)\cup(b,d]$- замкнуто

Правильные варианты ответа: 1-а, 2-б, 3-в.

8. Задание № 8 **(УК-1, ПК-1)** Соответствие указанных функций $g(x)$, для множества E – функций пространства $C[-1,1]$, таких, что $f(x)\le 1$ при $x\in[-1,1]$:

1. $g(x)=1-x^2$ а) Граничная «точка»

2. $g(x)=\sin x$ б) Внутренняя «точка»

3. $g(x)=2x$ в) Внешняя «точка»

г) Изолированная «точка»

Правильные варианты ответа: 1-а, 2-б, 3-в.

9. Задание № 9 **(УК-1, ПК-1)** Взаимно-однозначное соответствие между полуинтервалом $[0,1)$ и полупрямой $[0,+\infty)$, есть…

☐ $f(x)=ctg\frac{\pi}{2}x;\ x\in[0,+\infty]$

☐ $f(x)=ctg\frac{\pi}{2}x;\ x\in[-\infty,+\infty]$

☑ $f(x)=tg\frac{\pi}{2}x;\ x\in[0,+\infty]$

☐ $f(x) = tg\, x;\ x \in [0, +\infty]$

10. Задание №10 **(УК-1, ПК-1)** Производное множество множества $\{\sin n\pi\alpha\}_{n=1}^{\infty}$, где α - иррациональное фиксированное число, есть…

☐ $[0, 1]$ ☐ $(0, 1)$ ☐ $\{0, 1\}$ ☑ $[-1, 1]$

11. Задание №11 **(УК-1, ПК-1)** Множество $\{\sin r\}$, где r - любое рациональное число, ……. на отрезке: $[-1, 1]$.

Правильные варианты ответа: всюду плотно; всюду плотное.

12. Задание №12 **(УК-1, ПК-1)** Каждое несчетное замкнутое множество A, представимо в виде: $A = B + C$, где…

☑ B - совершенное множество, C - счетное множество

☐ B - открытое множество, C - счетное множество

☐ B - замкнутое множество, C - несчетное множество

☐ B - совершенное множество, C - несчетное множество

13. Задание №13 **(УК-1, ПК-1)** Множество A точек, координаты которых удовлетворяют условиям: $\begin{cases} x + y > 5, \\ x^2 + y^2 > 36 \end{cases}$ …….

Правильные варианты ответа: открыто; открытое.

14. Задание № 14 **(УК-1, ПК-1)** Соответствие множеств и их замыканий:

1. Множество точек вида: $\frac{a^2}{b^2}$; где $a, b \in Z;\ b \neq 0$.	а) $[0, +\infty)$
2. Множество точек вида: $\frac{b^2}{4a^2 + b^2}$; где $a, b \in Z;\ a \neq 0, b \neq 0$.	б) $[0, 1]$
3. Множество точек вида: $2^{\frac{a}{b}}$; где $a, b \in N$.	в) $[1, +\infty)$
	г) $(0, 1)$
	д) $(0, +\infty)$

Правильные варианты ответа: 1-а, 2-б, 3-в.

15. Задание №15 **(УК-1, ПК-1)** A - произвольное множество, B - множество всех функций на A, принимающих значения 0 и 1: $f: A \to \{0, 1\}$. Тогда…

☑ $|A| < |B|$ ☐ $|A| > |B|$ ☐ $|A| = |B|$

<u>Тест II</u>

Мера Лебега. Измеримые множества и функции. Интеграл Лебега.

16. Задание №16 **(ПК-1)** Мера множества E, которое содержит хотя бы одну внутреннюю точку, есть…

☐ $mE \geq 0$ ☑ $mE > 0$ ☐ $mE = 0$ ☐ $mE < 0$

17. Задание №17 **(УК-1, ПК-1)** Соответствие мер пересечения $E = \bigcap_n E_n$ - убывающей последовательности $\{E_n\}$ - измеримых множеств бесконечной меры:

1. $E_n = \left[-\frac{1}{n}, +\infty\right)$;	а) $mE = +\infty$;
2. $E_n = [-1,0] \cup [n, +\infty)$;	б) $mE = 1$
3. $E_n = [n, +\infty)$;	в) $mE = 0$
	г) $mE = -1$

Правильные варианты ответа: 1-а, 2-б, 3-в.

18. Задание №18 **(ПК-1)** E - множество всех рациональных чисел на отрезке $[0,1]$. Тогда мера замыкания: $m\overline{E}$, равна…

Правильные варианты ответа: 1.

19. Задание №19 **(УК-1, ПК-1)** Для любой конечной или счетной совокупности $\{E_i\}$ - измеримых множеств в евклидовом пространстве выполняется:

☐ $\sum_i mE_i \geq m\left(\bigcup_i E_i\right) + \sum_{i<j} m\left(E_i \bigcap E_j\right)$

☑ $\sum_i mE_i \leq m\left(\bigcup_i E_i\right) + \sum_{i<j} m\left(E_i \bigcap E_j\right)$

☐ $\sum_i mE_i < m\left(\bigcap_i E_i\right) + \sum_{i<j} m\left(E_i \bigcap E_j\right)$

☐ $\sum_i mE_i = m\left(\bigcup_i E_i\right) + \sum_{i<j} m\left(E_i \bigcap E_j\right)$

20. Задание №20 **(УК-1, ПК-1)** Соответствие свойств мер Лебега ограниченных замкнутых и открытых множеств на прямой:

1. Мера непустых открытых множеств	а) Мера положительна
2. Мера непустых замкнутых множеств	б) Мера неотрицательна
	в) Мера равна нулю
	г) Мера равна единице

Правильные варианты ответа: 1-а, 2-б.

21. Задание № 21 **(УК-1, ПК-1)** На квадрате $[0,1]\times[0,1]$ нигде не плотное совершенное множество имеет плоскую меру равную: $0{,}1$. Тогда мера дополнения к совершенному множеству равна…

Правильные варианты ответа: 0,9.

22. Задание №22 **(УК-1, ПК-1)** Для любой измеримой и почти везде конечной на множестве E функции существует последовательность…….. на E функций, которая сходится к ней по мере на E .

☑ непрерывных ☐ ограниченных ☐ равномерно непрерывных ☐ дифференцируемых

23. Задание №23 **(УК-1, ПК-1)** Множество и ее характеристическая функция одновременно….

☑ измеримы и неизмеримы

☐ измеримы и меры их равны друг другу

☐ неизмеримы и меры их равны нулю

☐ неизмеримы и меры их равны бесконечности

24. Задание № 24 **(УК-1, ПК-1)** Мера графика непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции равна…

☐ $|f(x)|$ ☐ 1 ☑ 0 ☐ $1-|f(x)|$

25. Задание № 25 **(УК-1, ПК-1)** Некоторое соотношение или обстоятельство имеет место на E ……, если множество точек в которых оно выполняется, имеет меру 0.

Правильные варианты ответа: почти везде; почти всюду.

26. Задание № 26 **(УК-1, ПК-1)** Дана измеримая функция $f(x)$. Измеримость функции $|f(x)|$, при любом $a>0$, означает:

☐ $E(|f(x)|>a)=E(f(x)<a)\bigcup E(f(x)>-a)$

☐ $E(|f(x)|>a)=E(f(x)<-a)\bigcap E(f(x)>a)$

☐ $E(|f(x)|>a)=E(f(x)\le a)\bigcap E(f(x)\ge -a)$

☑ $E(|f(x)|>a)=E(f(x)<-a)\bigcup E(f(x)>a)$

27. Задание № 27 **(УК-1, ПК-1)** Соответствие внешней - m^*E и внутренней - m_*E мер ограниченного множества E :

1. Внешняя мера m^*E, где E_i- всевозможные открытые множества, содержащие E

а) $m^*E=\inf\limits_{E\subset\bigcup\limits_i E_i}\sum\limits_i mE_i$

2. Внутренняя мера $m_* E$, где E_i- всевозможные замкнутые множества, содержащиеся в E

б) $m_* E = \sup\limits_{\bigcup\limits_i E_i \subset E} \sum\limits_i mE_i$

в) $m^* E = \inf\limits_{\bigcup\limits_i E_i \subset E} \sum\limits_i mE_i$

г) $m_* E = \sup\limits_{\bigcap\limits_i E_i \subset E} \sum\limits_i mE_i$

Правильные варианты ответа: 1-а, 2-б.

28. Задание № 28 **(УК-1, ПК-1)** Интеграл Лебега на множестве E от ограниченной измеримой функции $f(x)$, определяется по формуле:

☐ $\int\limits_E f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k \, me_k$; $\lambda = \max\limits_k (y_{k+1} \cdot y_k)$

☐ $\int\limits_E f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \, me_k$; $\lambda = \max\limits_k (y_{k+1} + y_k)$

☑ $\int\limits_E f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n} y_k \, me_k$; $\lambda = \max\limits_k (y_{k+1} - y_k)$

☐ $\int\limits_E f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n} (y_k - me_k)$; $\lambda = \max\limits_k (y_{k+1} - y_k)$

29. Задание № 29 **(УК-1, ПК-1)** Пусть $f_n(x) = \begin{cases} n; 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0; \frac{1}{n} \le x < 1. \end{cases}$ $n = 1, 2, \ldots.$ $x \in (0,1)$.

Тогда интеграл: $\int\limits_0^1 f_n(x)dx$, равен…

Правильные варианты ответа: 1.

30. Задание №30 **(УК-1, ПК-1)** Интеграл Лебега: $\int\limits_0^1 f(x)dx$, если:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{для } x - \text{иррациональных, больших, чем } \frac{1}{2}, \\ x^2, \text{для } x - \text{иррациональных, меньших, чем } \frac{1}{2}, \\ 0, \text{в рациональных точках.} \end{cases}$$

равен…

☑ 0,32 ☐ $\frac{10}{24}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 0

Тест III

Метрические и нормированные пространства. Линейные операторы и линейные функционалы. Ряды Фурье.

31. Задание №31 **(УК-1)** Линейное пространство бесконечномерно, если для каждого натурального n, в нем существует n элементов являющихся……

Правильные варианты ответа: линейно независимыми; линейно независимые.

32. Задание № 32 **(УК-1, ПК-1)** Установить соответствие:

1. Евклидово пространство: R^n — а) $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2}$
2. Пространство всех числовых последовательностей: l_1 — б) $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|$
3. Пространство ограниченных числовых последовательностей: m — в) $\|x\| = \sup_i \{\xi_i\}$

Правильные варианты ответа: 1-а, 2-б, 3-в.

33. Задание № 33 **(УК-1, ПК-1)** В нормированном пространстве, расстояние между любыми двумя его элементами можно ввести по формуле:

☐ $\rho(x,y) = \|x+y\|$ ☐ $\rho(x,y) = \|x \cdot y\|$ ☑ $\rho(x,y) = \|x-y\|$ ☐ $\rho(x,y) = \sqrt{\|x-y\|}$

34. Задание № 34 **(УК-1, ПК-1)** Какие функции задают норму на числовой прямой:

☑ x^2 ☐ $|x-1|$ ☐ $\sqrt{x}$ ☑ $\sqrt{|x|}$

35. Задание №35 **(ПК-1)** Последовательность функций $x_n(t) = t^n$, в пространстве $C[0,1]$, сходится к функции $\theta(t)$, равной:

☐ 0 ☐ $n/(n+1)$ ☐ $1/n$ ☑ 1

36. Задание № 36 **(УК-1, ПК-1)** Установите соответствие:

1. Неравенство Гёльдера — а) $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q\right)^{1/q}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
2. Неравенство Минковского — б) $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p\right)^{1/p}, p \ge 1$

в) $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p\right)^{1/p}, p \ge 1$

г) $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^{p+q}\right)^{1/p + 1/q} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q\right)^{1/q}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Правильные варианты ответа: 1 - а; 2 - б.

37. Задание №37 **(УК-1, ПК-1)** Все нормы в пространстве R^n, задают …….. метрики.

Правильные варианты ответа: эквивалентные; эквивалентная.

38. Задание № 38 **(УК-1, ПК-1)** Функция $f(x)$ нормированная на $[a,b]$, если она удовлетворяет условию:

☐ $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ ☐ $\int_a^b f(x)dx = 1$ ☐ $\left\{\int_a^b |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2} = 1$ ☑ $\int_a^b f^2(x)dx = 1$

39. Задание № 39 **(УК-1, ПК-1)** Функционал $l(x)$, определенный и непрерывный на компактном в себе множестве, метрического пространства является ……. на этом множестве.

Правильные варианты ответа: ограниченный; ограниченным.

40. Задание № 40 **(УК-1, ПК-1)** Функционал $l(x)$, определенный на линейном нормированном пространстве X, называется ограниченным, если $\exists\alpha > 0$, что:

☐ $\|l(x)\| \le \alpha\|x\|$ ☑ $|l(x)| \le \alpha\|x\|$ ☐ $\alpha\|l(x)\| \le \|x\|$ ☐ $\frac{\|l(x)\|}{\alpha} \ge \|x\|$

41. Задание № 41 **(УК-1, ПК-1)** Норма ограниченного оператора A, есть:

☑ $\|A\| = \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}; x \ne 0$ ☐ $\|A\| = \inf_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}; x \ne 0$ ☐ $\|A\| = \sup_x (\|Ax\| - \|x\|); x \ne 0$

42. Задание № 42 **(УК-1, ПК-1)** Линейный оператор $A: X \to Y$, заданный на X и непрерывный в точке ……, непрерывен в любой точке $x_0 \in X$:

Правильные варианты ответа: ноль, нуль.

43. Задание № 43 **(УК-1, ПК-1)** Разложение в ряд Фурье функции $f(x) = x$, на интервале $(-\pi,\pi)$, имеет вид…

☑ $x = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + ...\right)$

☐ $x = 2(\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x + ...)$

☐ $x = \left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + ...\right)$

☐ $x = 2\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + ...\right)$

44. Задание № 44 **(УК-1, ПК-1)** Соответствие коэффициентов и их значений в разложении в ряд Фурье функции $f(x) = \begin{cases} -2; -\pi < x < 0 \\ 3; 0 \le x < \pi \end{cases}$, на интервале $(-\pi,\pi)$

1. a_0 а) 1

2. a_n б) 0

3. b_n в) $\begin{cases} \dfrac{10}{\pi n}; n - нечетное \\ 0; n - четное \end{cases}$

г) $\begin{cases} \pi n; n - нечетное \\ 1; n - четное \end{cases}$

Правильные варианты ответа: 1-а, 2-б, 3-в.

***45. Задание № 45* (УК-1, ПК-1)** Ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ можно почленно интегрировать в промежутке от $-\pi$ до π, так как он:

☐ замкнут ☐ ограничен ☑ мажорируем

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний

Ключи к тестовым заданиям.

Задания № вопроса в тесте	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***16***	***17***	***18***	***19***	***20***	***21***	***22***	
1		*а*			*а*		*а*	*а*				+		*а*	+		*а*			*а*		+	
2		*б*			*б*		*б*	*б*						*б*		+	*б*		+	*б*			
3		*в*			*в*	+	*в*	*в*	+					*в*			*в*						
4		*г*	+	+	*г*					+													
Задания № вопроса в тесте	***23***	***24***	***25***	***26***	***27***	***28***	***29***	***30***	***31***	***32***	***33***	***34***	***35***	***36***	***37***	***38***	***39***	***40***	***41***	***42***	***43***	***44***	***45***
1	+				*а*			+		*а*		+		*а*					+		+	*а*	
2					*б*					*б*				*б*				+				*б*	
3		+				+	+			*в*	+											*в*	+
4				+									+			+							

Шкала оценивания *(за правильный ответ дается 1 балл)*
«неудовлетворительно» – 50% и менее
«удовлетворительно» – 51-80%
«хорошо» – 81-90%
«отлично» – 91-100%

Критерии оценки тестового материала по дисциплине «Теория функций действительного переменного»:

✓ 5 баллов - выставляется студенту, если выполнены все задания варианта, продемонстрировано знание фактического материала (базовых понятий, алгоритма, факта).

✓ 4 балла - работа выполнена вполне квалифицированно в необходимом объёме; имеются незначительные методические недочёты и дидактические ошибки. Продемонстрировано умение правильно использовать специальные термины и понятия, узнавание объектов изучения в рамках определенного раздела дисциплины; понятен творческий уровень и аргументация собственной точки зрения

✓ 3 балла – продемонстрировано умение синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей в рамках определенного раздела дисциплины;

✓ 2 балла - работа выполнена на неудовлетворительном уровне; не в полном объёме, требует доработки и исправлений и исправлений более чем половины объема.

7.2.4. Балльно-рейтинговая система оценки знаний обучающихся

Согласно Положения о балльно-рейтинговой системе оценки знаний обучающихся баллы выставляются в соответствующих графах журнала (см. «Журнал учета балльно-рейтинговых показателей студенческой группы») в следующем порядке:

«Посещение» - 2 балла за присутствие на занятии без замечаний со стороны преподавателя; 1 балл за опоздание или иное незначительное нарушение дисциплины; 0 баллов за пропуск одного занятия (вне зависимости от уважительности пропуска) или опоздание более чем на 15 минут или иное нарушение дисциплины.

«Активность» - от 0 до 5 баллов выставляется преподавателем за демонстрацию студентом знаний во время занятия письменно или устно, за подготовку домашнего задания, участие в дискуссии на заданную тему и т.д., то есть за работу на занятии. При этом преподаватель должен опросить не менее 25% из числа студентов, присутствующих на практическом занятии.

«Контрольная работа» или «тестирование» - от 0 до 5 баллов выставляется преподавателем по результатам контрольной работы или тестирования группы, проведенных во внеаудиторное время. Предполагается, что преподаватель по согласованию с деканатом проводит подобные мероприятия по выявлению остаточных знаний студентов не реже одного раза на каждые 36 часов аудиторного времени.

«Отработка» - от 0 до 2 баллов выставляется за отработку каждого пропущенного лекционного занятия и от 0 до 4 баллов может быть поставлено преподавателем за отработку студентом пропуска одного практического занятия или практикума. За один раз можно отработать не более шести пропусков (т.е., студенту выставляется не более 18 баллов, если все пропущенные шесть занятий являлись практическими) вне зависимости от уважительности пропусков занятий.

«Пропуски в часах всего» - количество пропущенных занятий за отчетный период умножается на два (1 занятие=2 часам) (заполняется делопроизводителем деканата).

«Пропуски по неуважительной причине» - графа заполняется делопроизводителем деканата.

«Попуски по уважительной причине» - графа заполняется делопроизводителем деканата.

«Корректировка баллов за пропуски» - графа заполняется делопроизводителем деканата.

«Итого баллов за отчетный период» - сумма всех выставленных баллов за данный период (графа заполняется делопроизводителем деканата).

Таблица перевода балльно-рейтинговых показателей в отметки традиционной системы оценивания

Соотношение часов лекционных и практических занятий	0/2	1/3	1/2	2/3	1/1	3/2	2/1	3/1	2/0	Соответствие отметки коэффициенту
Коэффициент соответствия балльных	1,5	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	«зачтено»
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	«удовлетворительно»

показателей традиционной отметке	2	1,75	1,65	1,6	1,5	1,4	1,35	1,25	-	«хорошо»
	3	2,5	2,3	2,2	2	1,8	1,7	1,5	-	«отлично»

Необходимое количество баллов для выставления отметок («зачтено», «удовлетворительно», «хорошо», «отлично») определяется произведением реально проведенных аудиторных часов (n) за отчетный период на коэффициент соответствия в зависимости от соотношения часов лекционных и практических занятий согласно приведенной таблице.

«Журнал учета балльно-рейтинговых показателей студенческой группы» заполняется преподавателем на каждом занятии.

В случае болезни или другой уважительной причины отсутствия студента на занятиях, ему предоставляется право отработать занятия по индивидуальному графику.

Студенту, набравшему количество баллов менее определенного порогового уровня, выставляется оценка "неудовлетворительно" или "не зачтено". Порядок ликвидации задолженностей и прохождения дальнейшего обучения регулируется на основе действующего законодательства РФ и локальных актов КЧГУ.

Текущий контроль по лекционному материалу проводит лектор, по практическим занятиям – преподаватель, проводивший эти занятия. Контроль может проводиться и совместно.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля). Информационное обеспечение образовательного процесса

8.1. Основная литература

1. Авраменко, В. С. Теория функций действительного переменного : учебное пособие / В. С. Авраменко. — Елец : ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011 — Часть 1 — 2011. — 100 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/195999 - Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Авраменко, В. С. Теория функций действительного переменного : учебное пособие / В. С. Авраменко. — Елец : ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011 — Часть 2 — 2012. — 112 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/196002 - Режим доступа: для авториз. Пользователей.

3. Быкова, О. Н. Теория функций действительного переменного : учебное пособие / О. Н. Быкова, С. Ю. Колягин, Б. Н. Кукушкин. - Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2019. - 196 с. - ISBN 978-5-905554-21-6. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1027407 - Режим доступа: по подписке.

4. Леонтьева, Т. А. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями: Учеб. пособие / Т. А. Леонтьева , А. В. Домрина — М.: ИНФРА-М, 2018. — 164 с. — (Высшее образование: Магистратура). - ISBN 978-5-16-006429-1. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/917972 - Режим доступа: по подписке.

8.2. Дополнительная литература

1. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу. [Электронный ресурс] : Учебные пособия / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. — Электрон. дан. — М.: Физматлит, 2005. — 240 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/2342 - Режим доступа: для авториз. пользователей.

2. Ульянов, П. Л. Действительный анализ в задачах [Электронный ресурс] / П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко и др. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 416 с. - ISBN 5-9221-0595-7. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/544632 - Режим доступа: по подписке.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Виды учебных занятий	Организация деятельности студента
Лекция	Написание конспекта лекций: краткое, схематичное, последовательное фиксирование основных положений, выводов, формулировок, обобщений; выделение ключевых слов, терминов. Проверка терминов, понятий с помощью энциклопедий, словарей, справочников с выписыванием толкований в тетрадь. Обозначение вопросы, терминов, материала, вызывающего трудности. Если самостоятельно не удается разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на консультации, на практическом занятии.
Практические занятия	Конспектирование источников. Работа с конспектом лекций, подготовка ответов к контрольным вопросам, просмотр рекомендуемой литературы, работа с текстом.
Контрольная работа/ индивидуальные задания	Знакомство с основной и дополнительной литературой, включая справочные издания, зарубежные источники, конспект основных положений, терминов, сведений, требующих для запоминания и являющихся основополагающими в этой теме. Составление аннотаций к прочитанным литературным источникам и др.
Реферат	Реферат: Поиск литературы и составление библиографии, использование от 3 до 5 научных работ, изложение мнения авторов и своего суждения по выбранному вопросу; изложение основных аспектов проблемы. Ознакомиться со структурой и оформлением реферата.
Коллоквиум	Работа с конспектом лекций, подготовка ответов к контрольным вопросам и др.
Самостоятельная работа	Проработка учебного материала занятий лекционного и семинарского типа. Изучение нового материала до его изложения на занятиях. Поиск, изучение и презентация информации по заданной теме, анализ научных источников. Самостоятельное изучение отдельных вопросов тем дисциплины, не рассматриваемых на занятиях лекционного и семинарского типа. Подготовка к текущему контролю, к промежуточной аттестации.
Подготовка к экзамену	При подготовке к экзамену необходимо ориентироваться на конспекты лекций, рекомендуемую литературу и др.

10. Требования к условиям реализации рабочей программы дисциплины (модуля)

10.1. Общесистемные требования

Электронная информационно-образовательная среда ФГБОУ ВО «КЧГУ»

Каждый обучающийся в течение всего периода обучения обеспечен индивидуальным неограниченным доступом к электронной информационно-образовательной среде (ЭИОС) Университета из любой точки, в которой имеется доступ к

информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», как на территории Университета, так и вне ее.

Функционирование ЭИОС обеспечивается соответствующими средствами информационно-коммуникационных технологий и квалификацией работников, ее использующих и поддерживающих. Функционирование ЭИОС соответствует законодательству Российской Федерации.

Адрес официального сайта университета: http://kchgu.ru.

Адрес размещения ЭИОС ФГБОУ ВО «КЧГУ»: https://do.kchgu.ru.

Электронно-библиотечные системы (электронные библиотеки)

Учебный год	Наименование документа с указанием реквизитов	Срок действия документа
2024-2025 учебный год	Электронно-библиотечная система ООО «Знаниум». Договор № 238 эбс от 23.04.2024 г. Электронный адрес: https://znanium.com	От 23.04.2024г. до 11.05.2025г.
2024-2025 учебный год	Электронно-библиотечная система «Лань». Договор № 36 от 14.03.2024 г. Электронный адрес: https://e.lanbook.com	По 19.01.2025г.
2024-2025 учебный год	Электронно-библиотечная система КЧГУ. Положение об ЭБ утверждено Ученым советом от 30.09.2015г. Протокол № 1. Электронный адрес: http://lib.kchgu.ru	Бессрочный
2024-2025 учебный год	Национальная электронная библиотека (НЭБ). Договор №101/НЭБ/1391-п от 22. 02. 2023 г. Электронный адрес: http://rusneb.ru	Бессрочный
2024-2025 учебный год	Научная электронная библиотека «ELIBRARY.RU». Лицензионное соглашение №15646 от 21.10.2016 г. Электронный адрес: http://elibrary.ru	Бессрочный
2024-2025 учебный год	Электронный ресурс Polpred.comОбзор СМИ. Соглашение. Бесплатно. Электронный адрес: http://polpred.com	Бессрочный

10.2. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины

Занятия проводятся в учебных аудиториях, предназначенных для проведения занятий лекционного и практического типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации в соответствии с расписанием занятий по образовательной программе. С описанием оснащенности аудиторий можно ознакомиться на сайте университета, в разделе материально-технического обеспечения и оснащенности образовательного процесса по адресу: https://kchgu.ru/sveden/objects/

10.3. Необходимый комплект лицензионного программного обеспечения

– MicrosoftWindows (Лицензия № 60290784), бессрочная
– MicrosoftOffice (Лицензия № 60127446), бессрочная
– ABBY FineReader (лицензия № FCRP-1100-1002-3937), бессрочная
– CalculateLinux (внесён в ЕРРП Приказом Минкомсвязи №665 от 30.11.2018-2020), бессрочная
– Google G Suite for Education (IC: 01i1p5u8), бессрочная

– Kaspersky Endpoint Security (Лицензия № 280E-210210-093403-420-2061), с 25.01.2023 г. по 03.03.2025 г.

10.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Федеральный портал «Российское образование»- https://edu.ru/documents/
2. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – http://school-collection.edu.ru/
3. Базы данных Scopus издательства Elsevirhttp://www.scopus.com/search/form.uri?display=basic.
4. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования - http://fgosvo.ru.
5. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) – http://edu.ru.
6. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (Единая коллекция ЦОР) – http://school-collection.edu.ru.
7. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» (ИС «Единое окно») – http://window/edu.ru.

11. Особенности организации образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья

В ФГБОУ ВО «Карачаево-Черкесский государственный университет имени У.Д. Алиева» созданы условия для получения высшего образования по образовательным программам обучающихся с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ).

Специальные условия для получения образования по ОПВО обучающимися с ограниченными возможностями здоровья определены «Положением об обучении лиц с ОВЗ *в КЧГУ*», размещенным на сайте Университета по адресу: http://kchgu.ru.

12. Лист регистрации изменений

В рабочей программе внесены следующие изменения:

Изменение	Дата и номер ученого совета факультета/института, на котором были рассмотрены вопросы о необходимости внесения изменений	Дата и номер протокола ученого совета Университета, на котором были утверждены изменения	Дата введения изменений
Обновлены договоры: 1. На антивирус Касперского. (Договор №56/2023 от 25 января 2023г.). Действует до 03.03.2025г. 2.Договор № 915 ЭБС ООО «Знаниум» от 12.05.2023г. Действует до 15.05.2024г. 3.Договор № 36 от 14.03.2024г. эбс «Лань». Действует по 19.01.2025г. 4.Договор № 238 эбс ООО «Знаниум» от 23.04.2024г. Действует до 11 мая 2025г.		29.05.2024г., протокол № 8	30.05.2024г.,